Chapitre 1

Introduction à la Recherche Opérationnelle

Qu'est-ce que la Recherche Opérationnelle

La recherche opérationnelle (aussi appelée aide à la décision) peut être définie comme l'ensemble des méthodes et techniques rationnelles d'analyse et de synthèse des phénomènes d'organisation utilisables pour élaborer de meilleures décisions.

La recherche opérationnelle (RO) propose des modèles conceptuels pour analyser des situations complexes et permet aux décideurs de faire les choix les plus efficaces

(Wikipedia)

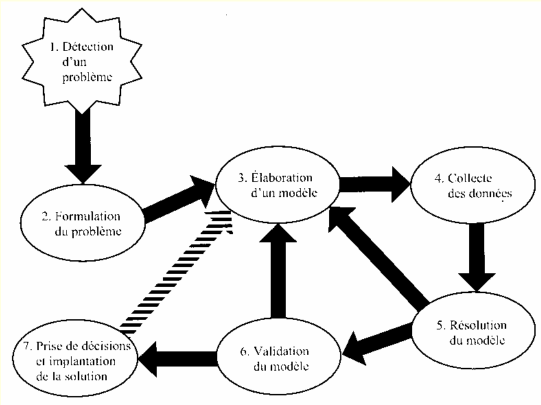
Origines de la RO

- Développement durant la seconde guerre mondiale: applications aux opérations militaires
  - répartition des troupes, du matériel, des ressources
  - Approvisionnement en vivres, en pièces, en armement
- Scientifiques et ingénieurs: applications civiles
  - programmation linéaire (1ère publication en 1939)
  - développement du simplexe par G. Dantzig (1947)
  - développement des techniques classiques en programmation linéaire, non-linéaire, dynamique, théorie des files d'attente, etc.
  - ralentissement des recherches générées par le manque d'outils de calcul

Modélisation

- Moyen pour mieux comprendre la réalité utilisée pour représenter les propriétés fondamentales d'un certain phénomène
- Problèmes de gestion souvent complexes
- Nécessité fréquente d'ignorer certains paramètres pour tirer une version idéale, épurée: c'est un modèle
- **Modèle déterministe** : Incertitude négligeable et résultats du phénomène prévu avec certitude
- **Modèle probabiliste ou stochastique**: Incertitude considérée comme facteur important du phénomène ou système analysé
- **Autres**

Méthode scientifique



Formulation du modèle mathématique

- Définir le problème
  - Quelle est la nature exacte du problème?
  - Quel est l'objectif recherché?
  - Quelles sont les conditions d'opération?
  - Quels sont les paramètres à considérer? Quelle influence?
  - Quel est le degré de précision requis?

Modèles déterministe

- Programmation linéaire
- Programmation en nombres entiers
- Programation non linéaire
- Programmation multicritère
- Problème de réseau
- … etc

Programmation Linéaire

Problème d'optimisation consistant à maximiser (ou minimiser) une fonction objectif linéaire de n variables de décision soumise à un ensemble de contraintes exprimées sous forme d'équations ou d'inéquations linéaires

Hypothèses:

- La linéarité des contraintes et de la fonction objectif
- La proportionnalité des gains/coûts et des consommation de ressources
- La divisibilité des variables
- Le déterminisme des données

Mise en forme Mathématique

- Définir les **variables de décision**
  - ensemble des variables qui régissent la situation à modéliser
  - variables réelles, entières, binaires
- Préciser la **fonction objectif**
  - fonction mathématique composée des variables de décision qui représente le modèle physique modélisé
  - fonction linéaire, non-linéaire
- Préciser les **contraintes** du problème
  - ensemble des paramètres qui limitent le modèle réalisable
  - équations ou inéquations composées des variables de décision
- Préciser les **paramètres** du modèle
  - constantes associées aux contraintes et à la fonction objectif

Formulation d'un modèle PL

Fonction Objectif : Maximiser ou minimiser

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + \ + c_nx_n$$

Contraintes

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b_2$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n \ (\leq, =, \geq)\ b_m$$

Contraintes de non-négativité

$$x_j \geq 0 \ ; j = 1, 2, 3, \dots n$$

avec

x_j variables de décision (inconnues)

a_{ij}, b_i, c_j paramètres du programme linéaire

Exemple: Problème de médecine

Un spécialiste en médecine a fabriqué un médicament (des pilules) pour guérir les sujets atteints d'un rhume. Ces pilules sont fabriquées selon deux formats :

- Petite taille : elle contient 2 grains d'aspirine, 5 grains de bicarbonate et 1 grain de codéine.
- Grande taille : elle contient 1 grain d'aspirine, 8 grains de bicarbonate et 6 grains de codéine.

Pour guérir la maladie, le sujet a besoin de 12 grains d'aspirine, 74 grains de bicarbonate et 24 grains de codéine. Déterminer le nombre de pilules minimales à prescrire au sujet pour qu'il soit guérit.

Formulation du problème de médecine

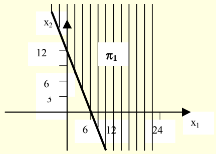
Le programme linéaire qui modélise ce problème médical est donc le suivant :

$$\begin{array}{ll} Min & x_1 + x_2 \\ s.c. & 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ & 5x_1 + 8x_2 \geq 74 \\ & x_1 + 6x_2 \geq 24 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

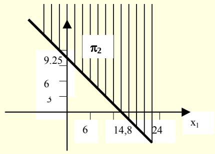
avec, x_1, est le nombre de pilules de petite taille à prescrire et x_2, est le nombre de pilules de grande taille à prescrire.

Résolution graphique d’un PL
(Représentation graphique des contraintes)

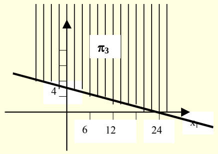
$2x_1 + x_2 \geq 12$

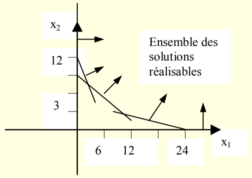


$5x_1 + 8x_2 \geq 74$



$x_1 + 6x_2 \geq 24$

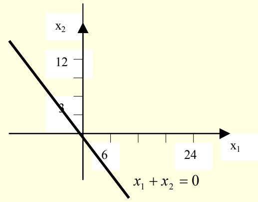


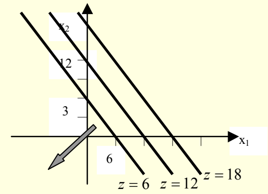


Résolution graphique d’un PL
(Représentation graphique de la fonction objectif)

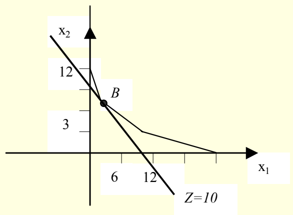
Soit z la valeur de la fonction objectif du problème de médecine

$$z = x_1 + x_2$$





Résolution graphique d’un PL
(Recherche de la solution optimale)

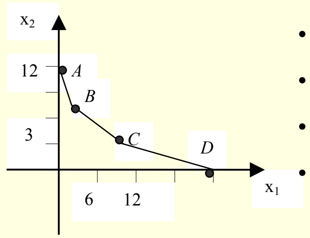


la solution optimale B est l’intersection des deux contraintes:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 12 \\ 5x_1 + 8x_2 = 74 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

Résolution graphique d’un PL
(Résolution par énumération)

La solution optimale du problème de médecine est un point extrême. Une telle solution est dite *solution réalisable de base*.



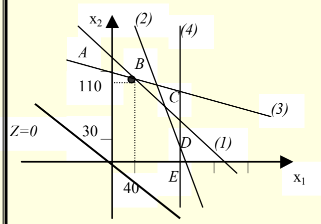
- $A(0,12)$ et $z_A=12$
- $B(2,8)$ et $z_B=10$
- $C(23/11,126/11)$ et $z_C=149/11$
- $D(24,0)$ et $z_D=24$

La méthode de simplexe

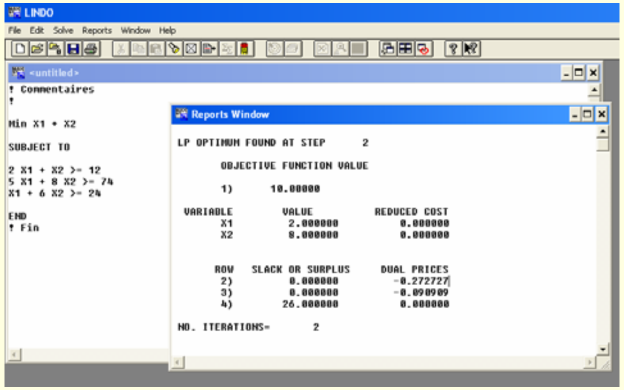
George B. Dantzig (1947)

1. Convertir le PL sous forme standard
2. Trouver une première solution réalisable de base
3. Déterminer si la solution réalisable de base est optimale
4. Si la solution n'est pas optimale, trouver une solution réalisable de base adjacente et meilleure que la précédente.
5. Retourner au point 3 avec la nouvelle solution réalisable de base.

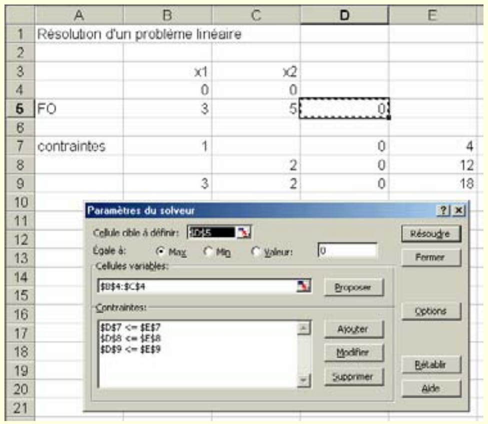
$$\begin{aligned} &Max \quad c^t x \\ &s.c \quad A\,x + S = b \\ &\qquad x \geq 0, S \geq 0 \end{aligned}$$



Résolution avec LINDO



Résolution avec EXCEL



Programmation en nombre entiers

$$(LP) \quad z_{\mathsf{LP}} = \max\{cx \ : Ax \leq b, \ x \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^n\}$$

$$(IP) \quad z_{\mathsf{IP}} = \max\{cx \ : Ax \leq b, \ x \geq 0, \ x \in \mathbb{Z}^n\}$$

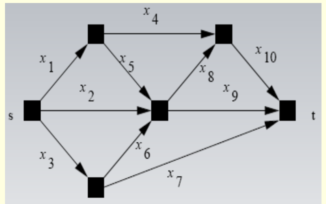
- (IP) est beaucoup plus difficile que (LP) (NP-complet)
- Beaucoup de problèmes pratiques peuvent être modélisés sous forme de (IP)

Exemple: Problème de sac à dos

Nous disposons d'un sac à dos de capacité b et de n objets. Le coût d'objet j est c_j, son poids est a_j . Comment remplir le sac à dos en maximisant le coût ?
On introduit des variables x_j binaire: $x_j=1$, on prend l'objet j, $x_j=0$, on ne le prend pas.

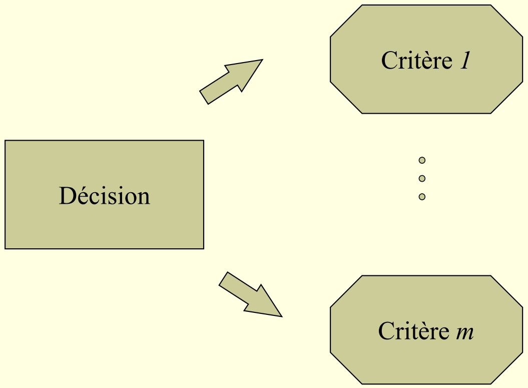
$$
\begin{aligned}
\max \quad & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.c.} \quad & a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \le b \\
& x_j \in \{0,1\},\ j = 1,\ldots,n
\end{aligned}
$$

Exemple: le plus court chemin



$$
\begin{aligned}
\min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_{10}x_{10} \\
\text{s.c.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
& x_1 - x_4 - x_5 = 0 \\
& x_3 - x_6 - x_7 = 0 \\
& x_5 + x_2 + x_6 - x_8 - x_9 = 0 \\
& x_4 + x_8 - x_{10} = 0 \\
& x_{10} + x_9 + x_7 = 1 \\
& x_1, \ldots, x_{10} \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

Programmation multicritère



Optimisation sous contrainte

- Optimiser le critère 1
- Tout en respectant un niveau minimum pour le critère 2
- La méthode peut s'étendre à un nombre quelconque de critères *(on optimise sur un critère et on contraint les autres)*

$$
\begin{aligned}
Max \quad & f_1(x) \\
S.c. \quad & f_2(x) \ge a \\
& x \in X
\end{aligned}
$$

Exemple: Sélection de portefeuille (Markowitz, 1959)

$$\mathit{Max} \quad R(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j$$

$$\mathit{Min} \quad V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$$

$$\mathit{S.c.} \quad \sum_{j=1}^{n} P_j x_j \leq B$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Programmation non linéaire

$$\mathit{Min} \quad V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j$$

$$\mathit{S.c.} \quad \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \geq L$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j \leq B$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Pondération des critères

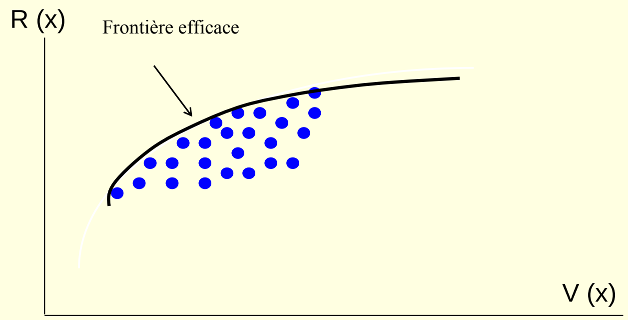
- On construit une somme pondérée des critères et on optimise ce critère composite
- En faisant varier les poids on obtient une “frontière efficace”

$$\mathit{Max} \quad \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$$

$$\mathit{S.c.} \quad \alpha_1 \geq 0, \; \alpha_2 \geq 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

Frontière efficace



Autre modèles déterministe

- Programmation dynamique
- Problèmes de transport
  - Chemins le plus court
  - Voyageur du commerce (TSP)
  - Arbre de recouvrement
  - Flôt
- Ordonnancement
- Gestion de la Production (Stock, planification, …)
- …ect

Modèles stochastique

La modélisation stochastique en R.O. est utile à chaque fois que le système comporte des éléments incertains mais quantifiables grâce à des distributions de probabilité. Parmi ces modèles on site:

- Les chaînes de Markov
- Les files d'attente
- La simulation
- PERT/CPM
- La prévision
- …ect

La distribution de probabilité

Probabilité vient du latin probare (prouver, ou tester). Une loi de probabilité ou distribution a commencé par décrire les répartitions typiques des fréquences d'apparition des résultats d'un phénomène aléatoire. On associe naturellement une loi de probabilité à une variable aléatoire pour décrire la répartition des valeurs qu'elle peut prendre.

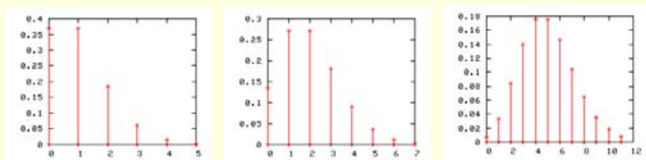
Parmi l'ensemble des lois de probabilités possibles, on distingue un certain nombre de familles usuelles qui correspondent à des phénomènes aléatoires simples : lancer de dés, jeu de pile ou face, erreurs de mesures, etc. Combinées entre elles, elles permettent d'élaborer des modélisations de phénomènes aléatoires plus complexes.

(Wikipedia)

Loi de Poisson

la loi de Poisson de paramètre λ correspond au modèle suivant: *« Sur une période T, un événement arrive en moyenne λ fois ».*

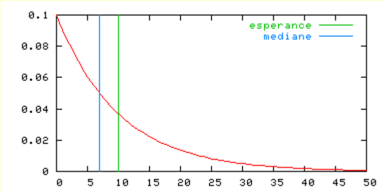
On appelle X la variable aléatoire déterminant le nombre de fois où l'événement se produit dans la période T. X prend des valeurs entières : 0, 1, 2, ... Ci-dessous sont représentés les diagrammes en bâtons des lois de Poisson de paramètres 1, 2 et 5.



(Wikipedia)

Loi exponentielle

Une loi exponentielle correspond au modèle suivant: *X est une variable aléatoire définissant la durée de vie d'un phénomène et si l'espérance de vie du phénomène est E(X) et si la durée de vie est sans vieillissement, c'est-à-dire si la durée de vie au-delà de l'instant T est indépendante de l'instant T ».* Ci-dessous est représentée la densité d'une durée de vie d'espérance 10 de loi exponentielle.



(Wikipedia)

Théorème de Bayes

Le théorème de Bayes est utilisé dans l'inférence statistique pour mettre à jour ou actualiser les estimations d'une probabilité ou d'un paramètre quelconque, à partir des observations et des lois de probabilité de ces observations.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Prise de décision dans l'incertain

Action \ events	w_1	w_2	w_3
A_1	5	3	1
A_2	10	6	-3
A_3	40	0	-20

a) Pas d'information sur la distribution de probabilité

b) Une distribution est donnée $P:=(p_1,p_2,p_3)$

Optimiste/Pessimiste

- Optimiste

Action \ events	w_1	w_2	w_3
A_1	5	3	1
A_2	10	6	-3
A_3	40	0	-20

- Pessimiste

Action \ events	w_1	w_2	w_3
A_1	5	3	1
A_2	10	6	-3
A_3	40	0	-20

Critère de Hurwicz

Cœfficient d'optimisme α in [0,1]

$$\alpha \cdot (optimistic\ result) + (1-\alpha) \cdot (pessimistic\ result)$$

event / Action	w_1	w_2	w_3	Hurwicz
A_1	5	3	1	$0.6 \cdot 5 + 0.4 \cdot 1 = 3.4$
A_2	10	6	-3	$0.6 \cdot 10 + 0.4 \cdot (-3) = 4.8$
A_3	40	0	-20	$0.6 \cdot 40 + 0.4 \cdot (-20) = 16$

$\alpha = 0.6$

Minimax regret

la méthode consiste à identifier pour chacun des états de nature la stratégie la plus favorable, puis à évaluer le manque à gagner (regret) que représenterait, par rapport à cette stratégie l'adoption de chacune des autres stratégies, enfin à retenir la stratégie conduisant au plus petit des regrets maximums.

event / Action	w_1	w_2	w_3
A_1	35	3	0
A_2	30	0	4
A_3	0	6	21

Critère de Laplace

Ce critère de Laplace-Bayes consiste à effectuer une simple moyenne arithmétique des revenus espérés, associés pour chaque stratégie aux divers états de la nature, puis à retenir la stratégie dont la moyenne est la plus élevée.

$$A_1 : \frac{5+3+1}{3} = 3$$

$$A_2 : \frac{10+6-3}{3} = 4.33$$

$$A_3 : \frac{40+0-20}{3} = 6.67$$

Décision et Risque

"Le risque est l'espérance mathématique d'une fonction de probabilité d'événements".

event / action	w_1	w_2	w_3	Moyenne
A_1	5	3	1	$5 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.3 = 3.2$
A_2	10	6	-3	$10 \cdot 0.4 + 6 \cdot 0.3 - 3 \cdot 0.3 = 4.9$
A_3	40	0	-20	$40 \cdot 0.4 + 0 \cdot 0.3 - 20 \cdot 0.3 = 10$

$p_1=0.4,\ p_2=0.3,\ p_3=0.3$

Extraction d'une distribution de Probabilité:

- Statistique (historique/expérience)
- Expert

Programmation linéaire stochastique

Les paramètres ne sont pas fixes mais ils suivent une loi de probabilité connue

$$\begin{aligned} &Min && c^t(w)\,x \\ &s.t. && T(w)\,x \geq h(w) \\ &&& x \in X_0 \end{aligned}$$

avec c, T et h des paramètres aléatoires avec une distribution de probabilité *connue*.

Exemple

$$\begin{aligned} &Min && z = x_1 + x_2 \\ &s.t. && x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ &&& a(w)\,x_1 + b(w)\,x_2 \geq 3 \\ &&& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$(a(w), b(w)) = \begin{cases} (a(w_1), b(w_1)) = (1{,}3) \text{ avec une probabilité de } \frac{1}{3} \\ (a(w_2), b(w_2)) = (3{,}1) \text{ avec une probabilité de } \frac{2}{3} \end{cases}$$

Fat solution

$$\begin{aligned} &Min && z = x_1 + x_2 \\ &s.t. && x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ &&& x_1 + 3\,x_2 \geq 3 \\ &&& 3\,x_1 + x_2 \geq 3 \\ &&& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Avantage: L'équivalent déterministe est un programme linéaire

Inconvénient: Approche trop restrictive et conservatrice. Souvent, on peut tenir compte des solutions non réalisables

Valeur moyenne

$$\begin{aligned} &Min && z = x_1 + x_2 \\ &s.t. && x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ &&& \frac{7}{3}x_1 + \frac{5}{3}x_2 \geq 3 \\ &&& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad (x_1, x_2) = (1.285{,}0)$$

$$w = w_1 \Rightarrow x_1 + 3x_2 \geq 3$$

$$w = w_2 \Rightarrow 3x_1 + x_2 \geq 3$$

Avantage: Un modèle linéaire simple.

Inconvénient: Cette approche ne tient pas compte du risque. La solution optimale est souvent non réalisable.

Analyse par scénario

$w = w_1 \Longrightarrow (x_1, x_2) = (1,0)$

$w = w_2 \Longrightarrow (x_1, x_2) = (0,1)$

Avantage: Chaque scénario est représenté par un programme linéaire.
Inconvénient: Comment agréger les différents scénarios.

Approche avec seuil de probabilité sur les contraintes (1)

$$\begin{array}{ll} Min & z = x_1 + x_2 \\ s.t. & x_1 + 2x_2 \le 2 \\ & P[a(w)\, x_1 + b(w)\, x_2 \ge 3] \ge \alpha \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{array}$$

Avantage: Le modèle tient compte du risque
Inconvénient: Les contraintes ne sont plus du type linéaire et l'ensemble des solutions réalisable peut être non convexe.

Approche avec seuil de probabilité sur les contraintes (2)

Si α=2/3 $\Longrightarrow$ w_2 ou w_1, w_2

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 2 \\ 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Approche Recours

$$a(w)\, x_1 + b(w)\, x_2 \ge 3 \Longrightarrow \begin{cases} a(w)\, x_1 + b(w)\, x_2 + Wy(w) \ge 3 \\ y(w) \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} Min & z = x_1 + x_2 + \left[\frac{1}{3} q_1 y_1 + \frac{2}{3} q_2 y_2\right] \\ s.t. & x_1 + 2x_2 \le 2 \\ & x_1 + 3x_2 + Wy_1 \ge 3 \\ & 3x_1 + x_2 + Wy_2 \ge 3 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{array}$$

Avantage: Le modèle tient compte du risque et le problème équivalent est un PL
Inconvénient: Le problème équivalent est large. Avec 10 v.a. chacune à 5 observations on a dans le PL 5^{10} variable y_i.