Chapitre 2

Chaîne de Markov

Processus stochastique

- Un processus stochastique $\{X_t,\ t \in T\} = \{X_0, X_1, X_2, \ldots\}$est une collection de variables aléatoires indexées par un paramètre t pour décrire le comportement d'un système donné pendant une période de temps précise.
- Exemple :
  - $X_0 = 3, X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 0, X_4 = 3, X_5 = 1$

Exemple

Un magasin de cameras se spécialise dans la vente d'un modèle spécifique de cameras.

D_t représente la demande pour cette camera durant la semaine t. D_t suit un processus de poisson avec une ésperance 1.

X_t représentent le nombre de cameras disponible à la fin de la semaine t. ($X_0 = 3$)

S'il n'y a plus de cameras dans la réserve samedi soir, le commerçant commande trois cameras.

$\{ X_t \}$ est un processus stochastique.

$X_{t+1} = \max\{ 3 - D_{t+1}, 0 \}$ si $X_t = 0$

$\max\{ X_t - D_{t+1}, 0 \}$ si $X_t \geq 0$

Chaîne de Markov

- A processus stochastique $\{X_t\}$ est une chaîne de Markov s'il vérifie la propriété Markovienne suivante.
- Propriété de Markov:

  $P\{ X_{t+1} = j \mid X_0 = k_0, X_1 = k_1, \ldots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i \}$

  $= P\{ X_{t+1} = j \mid X_t = i \}$
- $P\{ X_{t+1} = j \mid X_t = i \}$ est appelée probabilité de transition.
- Une probabilité de transition est dite stationnaire si pour tout couple (i,j)

  $P\{ X_{t+1} = j \mid X_t = i \} = P\{ X_1 = j \mid X_0 = i \}$pour tout t,

Matrice de transition

- Formulation de l'exemple
- Matrice de transition

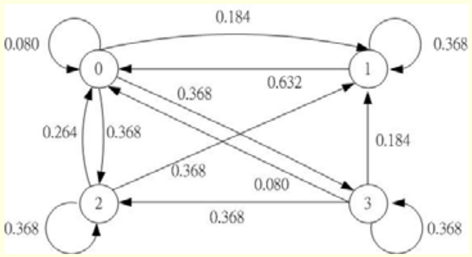
$$
\mathbf{P} = \begin{array}{c|cccc}
\text{états} & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
0 & p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\
1 & p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\
2 & p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\
3 & p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33}
\end{array}
$$

Formulation de l'exemple

- $X_{t+1} = \max\{\, 3 - D_{t+1}, 0 \,\}$ if $X_t = 0$
  $\max\{\, X_t - D_{t+1}, 0 \,\}$ if $X_t \geq 1$
- $P\{\, D_{t+1} = 0 \,\} = 0.368$
- $P\{\, D_{t+1} = 1 \,\} = 0.368$
- $P\{\, D_{t+1} = 2 \,\} = 0.184$
- $P\{\, D_{t+1} \geq 3 \,\} = 0.080$

$$
\mathbf{P} = \begin{array}{c|cccc}
\text{états} & 0 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
0 & 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\
1 & 0.632 & 0.368 & 0.000 & 0.000 \\
2 & 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0.000 \\
3 & 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368
\end{array}
$$

Diagramme de transition



Matrice de transition en n étapes

- Probabilité de transition en n étapes:

$$p_{ij}^{(n)} = P\{\, X_{t+n} = j \mid X_t = i \,\}$$

- Matrice de transition en n étapes

$$
P^{(n)} = \begin{array}{c|cccc}
\text{état} & 0 & 1 & \ldots & M \\
\hline
0 & P_{00}^{(n)} & P_{01}^{(n)} & \ldots & P_{0M}^{(n)} \\
1 & P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} & \ldots & P_{1M}^{(n)} \\
\vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
M & P_{M0}^{(n)} & P_{M1}^{(n)} & \ldots & P_{MM}^{(n)}
\end{array}
$$

Equation de Chapman-Kolmogorove

- Equation de Chapman-Kolmogorove

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n-m)}$$

pour tout $i = 0,1,\dots,M;\ j = 0,1,\dots,M$
et tout $m = 1,2,\dots,n\text{-}1;\ n = m+1,m+2,\dots$

- Cas m=1

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{(1)} p_{kj}^{(n-1)}$$

pour tout i et j

Exemple: Matrice de transition

- Conclusion :
  - $\boldsymbol{P}^{(n)} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{(n-1)} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{(n-2)} = \dots = \boldsymbol{P}^{n}$
- Matrice de transition en n étapes (application):

P =

état	0	1	2	3
0	0.080	0.184	0.368	0.368
1	0.632	0.368	0.000	0.000
2	0.264	0.368	0.368	0.000
3	0.080	0.184	0.368	0.368

$\mathbf{P}^{(4)}$ =

état	0	1	2	3
0	0.289	0.286	0.261	0.164
1	0.282	0.285	0.268	0.166
2	0.284	0.283	0.263	0.171
3	0.289	0.286	0.261	0.164

Exemple

- Quelle est la probabilité que le commerçant lui restera 3 cameras dans son magasin après 4 semaine de son inventaire?

- P{ $X_n = j$ } = P{ $X_0 = 0$ }$p_{0j}^{(n)}$ + P{ $X_0 = 1$ } $p_{1j}^{(n)}$ + ...
  + P{ $X_0 = M$ } $p_{Mj}^{(n)}$

- P{ $X_4 = 3$ } = P{ $X_0 = 0$ }$p_{03}^{(4)}$ + P{ $X_0 = 1$ } $p_{13}^{(4)}$
  + P{ $X_0 = 2$ } $p_{23}^{(4)}$ + P{ $X_0 = 3$ } $p_{33}^{(4)}$
  = (1) $p_{33}^{(4)}$ = 0.164

Probabilité stationnaire

$\boldsymbol{P}$ =

état	0	1	2	3
0	0.080	0.184	0.368	0.368
1	0.632	0.368	0.000	0.000
2	0.264	0.368	0.368	0.000
3	0.080	0.184	0.368	0.368

$\boldsymbol{P}^{(8)}$ =

état	0	1	2	3
0	0.286	0.285	0.264	0.166
1	0.286	0.285	0.264	0.166
2	0.286	0.285	0.264	0.166
3	0.286	0.285	0.264	0.166

Probabilité stationnaire (cont.)

- La probabilité stationnaire implique qu'il y a une probabilité limite pour laquelle le système revient à chaque état *j* aprés un grand nombre de transition, et que cette probabilité de transition est indépendante de l'état initial.
- Il y a des chaînes de Markov qui ne sont pas stationnaire.

état	0	1	2	3
0	π_0	π_1	π_2	π_3
1	π_0	π_1	π_2	π_3
2	π_0	π_1	π_2	π_3
3	π_0	π_1	π_2	π_3

Probabilité stationnaire (cont.)

La distribution stationnaire vérifie le système suivant dont M+2 équations et M+1 inconnus

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{M} \pi_i p_{ij} \qquad \text{pour } i = 0, 1, \ldots, M$$

$$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1$$

Probabilité stationnaire (cont.)

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0 p_{00} + \pi_1 p_{10} + \pi_2 p_{20} + \pi_3 p_{30} , \\ \pi_1 = \pi_0 p_{01} + \pi_1 p_{11} + \pi_2 p_{21} + \pi_3 p_{31} , \\ \pi_2 = \pi_0 p_{02} + \pi_1 p_{12} + \pi_2 p_{22} + \pi_3 p_{32} , \\ \pi_3 = \pi_0 p_{03} + \pi_1 p_{13} + \pi_2 p_{23} + \pi_3 p_{33} , \\ 1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 . \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_0 = 0.080\pi_0 + o.632\pi_1 + 0.264\pi_2 + 0.080\pi_3 , \\ \pi_1 = 0.184\pi_0 + 0.368\pi_1 + 0.368\pi_2 + 0.184\pi_3 , \\ \pi_2 = 0.368\pi_0 + \qquad + 0.368\pi_2 + 0.368\pi_3 , \\ \pi_3 = 0.368\pi_0 + \qquad + \qquad + 0.368\pi_3 , \\ 1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 . \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi_0 = 0.286,\ \pi_1 = 0.285,\ \pi_2 = 0.263,\ \pi_3 = 0.166$$

Classification des états de la Chaîne de Markov

- Accessible :
  - Etat *j* est accessible de l'état *i* si $P_{ij}^{(n)} > 0$ pour quelques $n \geq 0$.
- Communique :
  - Si l'état *j* est accessible de l'état *i* et l'état *i* est accessible de l'état *j*, alors les états *i* et *j* communiquent entre eux.
  - Si l'état *i* communique avec l'état *j* et l'état *j* communique avec l'état *k*, alors l'état *j* communique avec l'état *k*.
- Classe :
  - Les états peuvent être partitionés en un ou plusieurs classes d'équivalences .
  - Les éléments de chaque classe d'équivalence communiquent entre eux .