Classification des états de la Chaîne de Markov

- Accessible :
  - Etat j est accessible de l'état i si $p_{ij}^{(n)} > 0$ pour quelques $n \geq 0$.
- Communique :
  - Si l'état j est accessible de l'état i et l'état i est accessible de l'état j, alors les états i et j communiquent entre eux.
  - Si l'état i communique avec l'état j et l'état j communique avec l'état k, alors l'état i communique avec l'état k.
- Classe :
  - Les états peuvent être partitionés en un ou plusieurs classes d'équivalences .
  - Les éléments de chaque classe d'équivalence communiquent entre eux .
- Irréducible :
  - Une chaîne de Markov est dite irréductible si tous ses états communiquent entre eux càd il y a une seule classe d'équivalence.

Classification des états de la Chaîne de Markov

- Exemple:
  - On Suppose qu'un joueur a \$1 et pour chaque partie du jeu gagne \$1 avec une probabilité $p > 0$ ou bien perd \$1 avec une probabilité *1-p*. le jeu se termine quand le joueur aura \$3 ou bien il est fauché.

$$
P = \begin{array}{c|cccc}
\textit{état} & 0 & 1 & 2 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1-p & 0 & p & 0 \\
2 & 0 & 1-p & 0 & p \\
3 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

Classification des états de la Chaîne de Markov

- ***État transitoire*** :
  - Un état est dit transitoire si le processus ne retourne jamais dans cet état. Autrement; un état i est transitoire si et seulement si il existe un état j ($j \neq i$) accessible de l'état i et j n'est pas accessible de l'état i.
- ***État reccurent*** :
  - Un état est dit réccurent si le processus retourne à cet état définitivement. Autrement, un état est réccurent s'il n'est pas transitoire.
- ***État Absorbant*** :
  - Un état est dit absorbant si le processus ne peut pas sortir de cet état. Autrement, l'état i est absorbabt ssi $p_{ii} = 1$.

Classification des états de la Chaîne de Markov

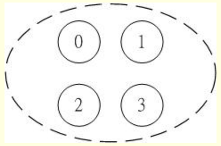
- Période:
  - La période de l'état i d'une chaîne de Markov est égale au plus grand commun diviseur de tous les n pour lesquels $p_{ii}^{(n)} > 0$.
  - L'état i est périodique lorsque $d > 1$.
- Apériodique:
  - L'état i est apériodique lorsque $d = 1$.
- Ergodique:
  - Les états réccurents et apériodiques sont érgodiques.
  - Une chaîne de Markov est dite ergodique si tous ses états sont ergodiques.
  - ***Pour toute chaîne de Markov irréductible et ergodique, il existe une distribution stationnaire dont la distribution de ses états converge vers cette distribution.***

Classification des états de la Chaîne de Markov

Exemple:

Le processus est irréductible est ergodique et donc il admet une distribution stationnaire

$$P = \begin{array}{c|cccc} \textit{état} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 1 & 0.632 & 0.368 & 0.000 & 0.000 \\ 2 & 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0.000 \\ 3 & 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{array}$$



Premier temps de passage

- ***Premier temps de passage*** :
  - Le premier temps de passage de l'état i à l'état j est le nombre de transitions effectuées par le processus en allant de l'état i à l'état j pour la première fois.
- ***Temps de réccurence*** :
  - Quand $j = i$, Le premier temps de retour à l'état i.
- Example :
  - $X_0 = 3, X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 0, X_4 = 3, X_5 = 1$
  - Le premier temps de passage de l'état 3 à l'état 1 est 2 semaines.
  - Le temps de réccurence de l'état 3 est 4 semaines.

Premier temps de passage

- $f_{ij}^{(n)}$: La probabilité du premier temps de passage de l'état i à l'état j en n étapes.
- Relations réccurentes :

$$f_{ij}^{(1)} = p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$$

$$f_{ij}^{(2)} = \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(1)}$$

$$\boxed{f_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)}}$$

Premier temps de passage

- Retour à l'exemple:
  - $f_{30}^{(1)} = p_{30} = 0.080$
  - $f_{30}^{(2)} = p_{31} f_{10}^{(1)} + p_{32} f_{20}^{(1)} + p_{33} f_{30}^{(1)}$
    $= 0.184\ (0.632) + 0.368\ (0.264) + 0.368\ (0.080) = 0.243$
  - ... ...
- Somme : $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \leq 1$
- Temps moyen de premier passage :

$$m_{ij} = \begin{cases} \infty & \text{si } \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} < 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)} & \text{si } \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1 \end{cases}$$

Premier temps de passage

$$m_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{(1)} + 2 f_{ij}^{(2)} + \ldots + f_{ij}^{(n)} = \sum_{T=1}^{\infty}\sum_{n=T}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=T}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \sum_{k\neq j} p_{ik} \sum_{n=T-1}^{\infty} f_{kj}^{(n)}$$

$$\Rightarrow \sum_{T=2}^{\infty}\sum_{n=T}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \sum_{k\neq j} p_{ik} \sum_{T=1}^{\infty}\sum_{n=T}^{\infty} f_{kj}^{(n)}$$

$$\Rightarrow m_{ij} - \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = \sum_{k\neq j} p_{ik}\, m_{kj}$$

Premier temps de passage

$$\boxed{m_{ij} = 1 + \sum_{k\neq j} p_{ik} m_{kj}}$$

Exemple

$$\begin{cases} m_{30} = 1 + p_{31}m_{10} + p_{32}m_{20} + p_{33}m_{30} \\ m_{20} = 1 + p_{21}m_{10} + p_{22}m_{20} + p_{23}m_{30} \\ m_{10} = 1 + p_{11}m_{10} + p_{12}m_{20} + p_{13}m_{30} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $m_{10} = 1.58$ *weeks*, $m_{20} = 2.51$ *weeks*, $m_{30} = 3.50$ *weeks*

Les États Absorbants

- Les états absorbants :
  - Un état k est dit un état absorbant si $p_{kk} = 1$, càd si la chaîne visite l'état k elle y restera.
- Exemple :
  - On suppose que deux joueurs (A et B), chacun a $2, se mette d'accord pour que le jeu se termine lorsque l'un deux n'aura plus d'argent. La probabilité d'un gagnant est de 1/3.

Les États Absorbants

- La matrice de transition

$$P = \begin{array}{c|ccccc} \text{état} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Les États Absorbants

- Probabilité d'absorption :
  - Si k est un état absorbant, et le processus part de l'état i, la probabilité de passage de l'état i à l'état k est appelée probabilité d'absorption

$$f_{ik} = \sum_{j=0}^{M} p_{ij} f_{jk} \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \ldots, M$$

$$f_{kk} = 1$$

$$f_{ik} = 0 \qquad \text{si l'état } i \text{ est réccurent et } i \neq k$$

Exemple : $f_{20} = 4/5$, $f_{24} = 1/5$