Introduction

Dans le chapitre 2, on s'est intéressé à l'étude du comportement des chaînes de Markov (calcul de la distribution stationnaire…)

Par ailleurs, il est parfois plus utile de décrire les opérations du système de sorte à optimiser sa performance (exemple: les files d'attente).

Dans ce chapitre on s'intéresse à la manière de concevoir les opérations dans un processus de Markov à temps discret de sorte à optimiser ces performances. Ainsi, au lieu d'accepter passivement la matrice de transition fixe, on va à chaque état de la chaîne déterminer la décision à prendre qui affectera les probabilités de transition et minimisera le coût du processus

Exemple: États

State	Condition
0	Good as new
1	Operable—minor deterioration
2	Operable—major deterioration
3	Inoperable—output of unacceptable quality

Le processus vérifie la propriété d'un processus de Markov ?

Exemple: Matrice de transition

State	0	1	2	3
0	0	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	0	0	0	1

Exemple: Coût de production et de maintenance

L'état 3 est un état absorbant. Arrivée à cet état, l'entreprise doit remplacer la machine par une nouvelle (le processus démarre ainsi de l'état 0). Le remplacement nécessite une semaine et coûte 1000$ en terme de production et la nouvelle machine vaut 4000$. Aussi, on peut identifier le coût d'une production défectueuse:

State	Expected Cost Due to Defective Items, $
0	0
1	1,000
2	3,000

Exemple: Stratégie de maintenance

Remplacer la machine lorsqu'elle tombe en panne (état 3):

State	0	1	2	3
0	0	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	1	0	0	0

Exemple: Le coût moyen à long terme

$$\left\{\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_3, \\ \pi_1 &= \frac{7}{8}\pi_0 + \frac{3}{4}\pi_1, \\ \pi_2 &= \frac{1}{16}\pi_0 + \frac{1}{8}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2, \\ \pi_3 &= \frac{1}{16}\pi_0 + \frac{1}{8}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2, \\ 1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3. \end{aligned}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{2}{13} \\ \pi_1 &= \frac{7}{13} \\ \pi_2 &= \frac{2}{13} \\ \pi_3 &= \frac{2}{13} \end{aligned}\right.$$

$$0\pi_0 + 1{,}000\pi_1 + 3{,}000\pi_2 + 6{,}000\pi_3 = \frac{25{,}000}{13} = \$1{,}923.08$$

Exemple: Autres stratégies de maintenance

Decision	Action	Relevant States
1	Do nothing	0, 1, 2
2	Overhaul (return system to state 1)	2
3	Replace (return system to state 0)	1, 2, 3

Decision	State	Expected Cost Due to Producing Defective Items, $	Maintenance Cost, $	Cost (Lost Profit) of Lost Production, $	Total Cost per Week, $
1. Do nothing	0	0	0	0	0
	1	1,000	0	0	1,000
	2	3,000	0	0	3,000
2. Overhaul	2	0	2,000	2,000	4,000
3. Replace	1, 2, 3	0	4,000	2,000	6,000

Processus de décision Markovien

1. L'état i d'une chaîne de Markov à temps discret est observé après chaque transition ($i=0, \ldots, M$)
2. Après chaque observation, une décision k est choisie parmi un ensemble de K décisions possibles ($k=1, 2, \ldots, K$). Quelques décisions peuvent ne pas être applicables pour certains états.
3. Si la décision $d_i=k$ est prise à l'état i, alors un coût immédiat moyen est induit C_{ik}.
4. La décision $d_i=k$ dans l'état i va déterminer la probabilité de transition de l'état i à l'état j. On note cette probabilité $p_{ij}(k)$, $j=0, 1, \ldots, M$.
5. La donnée des décisions d_0, d_1, …, d_M constitue une stratégie pour le processus de décision Markovien.
6. L'objectif est de trouver la stratégie qui optimise le coût moyen à long terme par unité de temps.

Exemple: Autres stratégies de maintenance

Policy	Verbal Description	$d_0(R)$	$d_1(R)$	$d_2(R)$	$d_3(R)$
R_a	Replace in state 3	1	1	1	3
R_b	Replace in state 3, overhaul in state 2	1	1	2	3
R_c	Replace in states 2 and 3	1	1	3	3
R_d	Replace in states 1, 2, and 3	1	3	3	3

State \ Decision	C_{ik} (in Thousands of Dollars) 1	2	3
0	0	—	—
1	1	—	6
2	3	4	6
3	—	—	6

Exemple: Évaluations des stratégies de maintenance

State	R_a: 0	1	2	3
0	0	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	1	0	0	0

State	R_b: 0	1	2	3
0	0	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	0	1	0	0
3	1	0	0	0

State	R_c: 0	1	2	3
0	0	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	1	0	0	0
3	1	0	0	0

State	R_d: 0	1	2	3
0	0	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	1	0	0	0
2	1	0	0	0
3	1	0	0	0

Exemple: Évaluations des stratégies de maintenance

$$E(C) = \sum_{i=0}^{M} C_{ik}\pi_i$$ avec $k = d_i(R)$

Policy	$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$	$E(C)$, in Thousands of Dollars
R_a	$\left(\frac{2}{13}, \frac{7}{13}, \frac{2}{13}, \frac{2}{13}\right)$	$\frac{1}{13}[2(0) + 7(1) + 2(3) + 2(6)] = \frac{25}{13} = \$1,923$
R_b	$\left(\frac{2}{21}, \frac{5}{7}, \frac{2}{21}, \frac{2}{21}\right)$	$\frac{1}{21}[2(0) + 15(1) + 2(4) + 2(6)] = \frac{35}{21} = \$1,667 \leftarrow$ Minimum
R_c	$\left(\frac{2}{11}, \frac{7}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right)$	$\frac{1}{11}[2(0) + 7(1) + 1(6) + 1(6)] = \frac{19}{11} = \$1,727$
R_d	$\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32}\right)$	$\frac{1}{32}[16(0) + 14(6) + 1(6) + 1(6)] = \frac{96}{32} = \$3,000$

Stratégie déterministe de décision

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Decision } k \\
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & K \end{array} \\
\text{State} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ M \end{array} &
\begin{bmatrix} D_{01} & D_{02} & \cdots & D_{0K} \\ D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1K} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{M1} & D_{M2} & \cdots & D_{MK} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$D_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{if decision } k \text{ is to be made in state } i \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Stratégie stochastique de décision

$$\begin{array}{cc} & \text{Decision } k \\ & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & K \end{array} \\ \text{State} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ M \end{array} & \begin{bmatrix} D_{01} & D_{02} & \cdots & D_{0K} \\ D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1K} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{M1} & D_{M2} & \cdots & D_{MK} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\sum_{k=1}^{K} D_{ik} = 1 \qquad 0 \le D_{ik} \le 1$$

Formulation du PL: Variable de décision

$$y_{ik} = P\{\text{state} = i \text{ and decision} = k\}$$
$$= \pi_i D_{ik}$$

$$\pi_i = \sum_{k=1}^{K} y_{ik} \Rightarrow D_{ik} = \frac{y_{ik}}{\pi_i} = \frac{y_{ik}}{\sum_{k=1}^{K} y_{ik}}$$

Formulation du PL: Contraintes

- $\sum_{i=1}^{M} \pi_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{M} \sum_{k=1}^{K} y_{ik} = 1$
- $\begin{cases} \pi_j = \sum_{i=0}^{M} \pi_i p_{ij} \\ j = 0, 1, \ldots, M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{K} y_{jk} = \sum_{i=0}^{M} \sum_{k=1}^{K} y_{ik} p_{ij}(k) \\ j = 0, 1, \ldots, M \end{cases}$
- $y_{ik} \ge 0 \quad i = 0, 1, \ldots, M$ et $k = 1, 2, \ldots, K$

Formulation du PL: Fonction objectif

Minimiser le coût moyen à long terme

$$E(C) = \sum_{i=0}^{M} \sum_{k=1}^{K} \pi_i C_{ik} D_{ik}$$
$$= \sum_{i=0}^{M} \sum_{k=1}^{K} C_{ik} y_{ik}$$

P.L.

$$\text{Minimize} \quad Z = \sum_{i=0}^{M} \sum_{k=1}^{K} C_{ik} y_{ik}$$

$$\sum_{i=0}^{M} \sum_{k=1}^{K} y_{ik} = 1.$$

$$\sum_{k=1}^{K} y_{jk} - \sum_{i=0}^{M} \sum_{k=1}^{K} y_{ik} p_{ij}(k) = 0, \qquad \text{for } j = 0, 1, \ldots, M.$$

$$y_{ik} \geq 0, \qquad \text{for } i = 0, 1, \ldots, M;\ k = 1, 2, \ldots, K.$$

Distribution du temps d'attente

Le P.L. présente $M+2$ contraintes dont une redondante. Ainsi la solution du P.L. comprend $M+1$, $y_{ik} \geq 0$. Par ailleurs, pour chaque $i=0,1,\ldots, M$ il existe au moins un k tel que $y_{ik}>0$, donc pour chaque i il existe exactement un seul k tel que $y_{ik}>0$.

$$D_{ik} = \frac{y_{ik}}{\pi_i} = \frac{y_{ik}}{\sum_{k=1}^{K} y_{ik}} = 0 \text{ ou } 1$$

Exemple: Formulation

$$\text{Minimize} \quad Z = 1{,}000 y_{11} + 6{,}000 y_{13} + 3{,}000 y_{21} + 4{,}000 y_{22} + 6{,}000 y_{23} + 6{,}000 y_{33},$$

subject to

$$y_{01} + y_{11} + y_{13} + y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{33} = 1$$

$$y_{01} - (y_{13} + y_{23} + y_{33}) = 0$$

$$y_{11} + y_{13} - \left(\frac{7}{8} y_{01} + \frac{3}{4} y_{11} + y_{22}\right) = 0$$

$$y_{21} + y_{22} + y_{23} - \left(\frac{1}{16} y_{01} + \frac{1}{8} y_{11} + \frac{1}{2} y_{21}\right) = 0$$

$$y_{33} - \left(\frac{1}{16} y_{01} + \frac{1}{8} y_{11} + \frac{1}{2} y_{21}\right) = 0$$

and

$$\text{all } y_{ik} \geq 0.$$

Exemple: Solution

$$y_{01} = \frac{2}{21}, \quad (y_{11}, y_{13}) = \left(\frac{5}{7}, 0\right), \quad (y_{21}, y_{22}, y_{23}) = \left(0, \frac{2}{21}, 0\right), \quad y_{33} = \frac{2}{21}$$

$$\Downarrow$$

$$D_{01} = 1, \quad (D_{11}, D_{13}) = (1, 0)$$

$$(D_{21}, D_{22}, D_{23}) = (0, 1, 0), \quad D_{33} = 1$$