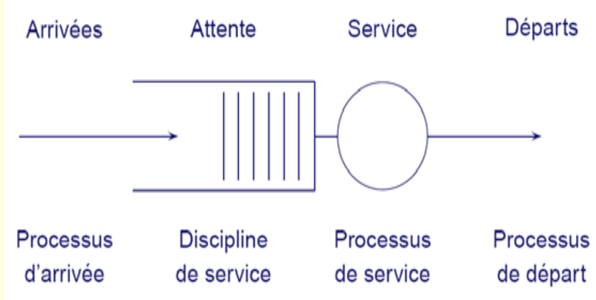
Chapitre 3

Théorie des files d’attente

Qu’est-ce qu’une file d’attente



Exemples de files d’attente

System	Servers	Customers
Bank	Tellers	Customers
Hospital	Doctors, nurses, beds	Patients
Computer System	CPU, I/O devices	Jobs
Manufacturing System	Machines, workers	Parts
Airport	Runways, gates, security check-in stations	Airplanes, travelers
Communications network	Nodes, links	Messages, packets

Notations simplifiée de Kendall

$\boxed{A/S/m}$

- A : symbole du **processus d’arrivée**, *i.e.* symbole désignant la loi de probabilité modélisant les temps entre deux arrivées successives de clients.

  Valeurs courantes :

  M = loi exponentielle, G = loi générale

- S : symbole du **processus de service**, *i.e.* symbole désignant la loi de probabilité modélisant le temps nécessaire au traitement d’un client.
- m : **nombre de serveurs**, *i.e.* nombre maximal de clients pouvant être traitées simultanément.

Notations complète de Kendall (1)

$$\boxed{A/S/m/K/P/D}$$

- K : **capacité du système**, *i.e.* nombre maximal de clients pouvant se trouver à un instant donné dans le système (qu'elles soient en attente ou en service).
- P : **taille de la population**, *i.e.* nombre total de clients circulant dans le système (et, donc, susceptibles d'accéder au serveur).
- D : **discipline de service**, *i.e.* règle précisant l'ordre dans lequel les clients accèdent au serveur.

  Valeurs courantes :

  FIFO : First In First Out, LIFO : Last In First Out

Processus de naissance et de mort

a/ La probabilité d'une arrivée pendant un intervalle de temps Δt est $\lambda\ \Delta t$, λ étant le nombre moyen des arrivées par unité de temps;
b/ La probabilité d'un départ pendant un intervalle de temps Δt est $\mu\ \Delta t$, μ étant le nombre moyen des départs par unité de temps;
c/ La probabilité que plusieurs arrivées ou plusieurs départs aient lieu durant l'intervalle de temps Δt est nul.

Processus des arrivées

Soit $N(t)$ le nombre de client dans la file d'attente à la date t

Soit $f(n)=Prob\ (N(t)=n)$. Déterminer la loi de densité f ?

$$Prob(N(t+\Delta t)=n) = \lambda\,\Delta t\ Prob(N(t)=n-1)+(1-\lambda\,\Delta t)\ Prob(N(t)=n)$$

……………………

$$f(n)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

f est la densité d'une loi de poisson de paramètre λt

Temps de service

Soit T la variable aléatoire qui représente le temps de service (le temps d'attente entre deux arrivées successif)

Déterminer la loi de T ?

$$g(\theta+\Delta\theta) = (1-\lambda t\ \Delta\theta)\ g(\theta)$$

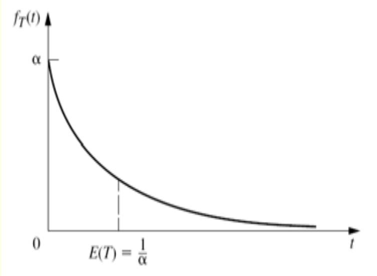
……………

$$g(\theta)=\lambda t\ e^{-\lambda t\,\theta}$$

T suit la loi exponentielle de paramètre λt

Loi exponentielle (1)

$$f_T(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} & \text{for } t \geq 0 \\ 0 & \text{for } t < 0, \end{cases}$$



$$E(T) = \frac{1}{\alpha},$$

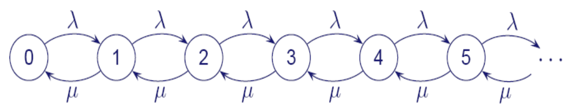
$$\text{var}(T) = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Loi exponentielle (2)

Soit T_n l'instant auquel se produit la nième arrivée (avec $T_0=0$).
On a

$$\begin{aligned} \text{Prob}(T_n - T_{n-1} \leq t) &= 1 - \text{Prob}(T_n - T_{n-1} > t) \\ &= 1 - \text{Prob}(N(T_n + t) - N(T_{n-1}) = 0) \\ &= 1 - \text{Prob}(N(t) = 0) \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

M/M/1



Une telle file est **stable** si et seulement si l'intensité du trafic (c.-à-d. le taux d'utilisation du serveur) y est inférieure à 1 :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1.$$

Performances

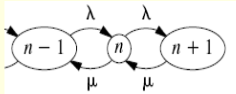
- L : le nombre moyen de clients dans le système,
- L_q : le nombre moyen de clients en attente,
- W : le temps moyen de séjour d'un client dans le système, aussi appelé temps moyen de réponse,
- W_q : le temps moyen d'attente d'un client

On a les lois de Little:

$$\boldsymbol{L = \lambda W}$$

$$\boldsymbol{L_q = \lambda W_q}$$

Équations d'équilibre (1)



$$
\begin{aligned}
\mathrm{Prob}\big(N(t+\Delta t)=n\big) = {} & \lambda\,\Delta t\,(1-\mu\,\Delta t)\,\mathrm{Prob}\big(N(t)=n-1\big)\\
& +(1-\lambda\,\Delta t)(1-\mu\,\Delta t)\,\mathrm{Prob}\big(N(t)=n\big)\\
& +\lambda\,\Delta t\;\mu\,\Delta t\;\mathrm{Prob}\big(N(t)=n\big)\\
& +(1-\lambda\,\Delta t)\,\mu\,\Delta t\;\mathrm{Prob}\big(N(t)=n+1\big)
\end{aligned}
$$

Équations d'équilibre (2)

Si on néglige les termes en Δt^2:

$$
\frac{\mathrm{Prob}\big(N(t+\Delta t)=n\big)-\mathrm{Prob}\big(N(t)=n\big)}{\Delta t} = \lambda\ \mathrm{Prob}\big(N(t)=n-1\big)
$$

$$
-(\lambda+\mu)\,\mathrm{Prob}\big(N(t)=n\big)+\mu\,\mathrm{Prob}\big(N(t)=n+1\big)
$$

$$
\Rightarrow\quad \begin{cases} \dfrac{dp_n}{dt} = \lambda\, p_{n-1} - (\lambda+\mu)\, p_n + \mu\, p_{n+1} \\[2mm] \dfrac{dp_0}{dt} = -\lambda\, p_0 + \mu\, p_1 \end{cases}
$$

Équations d'équilibre (3)

$$
\Rightarrow\quad p_n = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = (1-\rho)\,\rho^n
$$

Une file $M/M/1$ stable correspond à un processus markovien ergodique et admet donc une distribution stationnaire unique

$$
\boxed{\pi_i^* = (1-\rho)\rho^i \qquad \forall\, i \geq 0}
$$

Performance M/M/1

$$
L = \overline{X} = \sum_{n=0}^{+\infty} n\, p_n = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}
$$

$$
L_q = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)\, p_n = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}
$$

$$
W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} \qquad W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}
$$

Exemple: Attente chez un médecin

- Durée moyenne d'une consultation est 15 min
- Le médecin donne des rendez vous toutes les 20 min

On a λ=3 et μ=4

Nombre de patient présent : $L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 3$

Attente moyenne : $W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{3}{4}$ heures ☺

17

Distribution du temps de séjour

Dans une file M/M/1 − FIFO en régime stationnaire, le temps de réponse d'un client arrivant alors que le système compte n clients est formé

1. de son temps de service T_1;
2. de la somme des $(n-1)$ temps de service des clients le précédant dans la file $T_2, \ldots, T_n$;
3. du temps de service résiduel du client occupant le serveur T_{n+1}. Le temps de service étant exponentiel, il est sans mémoire et ce temps résiduel est un temps de service complet.

$$S_{n+1} = T_1 + T_2 + \cdots + T_{n+1}, \qquad \text{for } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

S_{n+1} est distribué selon une loi d'Erlang $\mathcal{E}_{n+1}(\mu)$ (somme de $n+1$ exponentielles i.i.d.).

18

Distribution du temps de séjour

On montre qu'elle suit une loi exponentielle de paramètre μ-λ.

$$P\{\mathcal{W} > t\} = e^{-\mu(1-\rho)t}, \qquad \text{for } t \geq 0$$

$$W = E(\mathcal{W}) = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

19

Distribution du temps d'attente

Dans une file M/M/1 − FIFO en régime stationnaire, le temps d'attente d'un client arrivant alors que le système compte n clients est

1. nul si $n = 0$;
2. égal à la somme des $(n-1)$ temps de service des clients le précédant dans la file et du temps de service résiduel du client occupant le serveur si $n > 0$

Le temps d'attente d'un client en trouvant n devant lui est distribué selon une loi $\mathcal{E}_n(\mu)$ si $n > 0$ et est nul si $n=0$

$$P\{\mathcal{W}_q > t\} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n P\{S_n > t\} = \rho e^{-\mu(1-\rho)t}, \qquad \text{for } t \geq 0$$

Elle suit une loi exponentielle tronquée de paramètre μ(1−ρ) = μ−λ.

20

Exemple: Attente chez un médecin

Qu'elle la probabilité qu'un patient attende plus d'une heure? plus de deux heures?

$$P\{W_q > t\} = \rho e^{-\mu(1-\rho)t}, \qquad \text{for } t \geq 0$$

- Pour t=1 heure, cette probabilité vaut 0.276
- Pour t=2 heures, elle vaut 0.101: 10% des patients attendent plus de deux heures: c'est énorme

21

Exemple: Attente chez un médecin

Qu'arriverait-il si le médecin décidait de ne convoquer ses patients toutes les 25 min ? Quel serait l'intervalle au-delà duquel moins de 10% des patients auraient à attendre ?

Alors λ'=2.4 arrivées par heure, μ étant inchangé, W_q=22.5 minutes: L'attente est moitié moindre mais le médecin reçoit moins de patients.

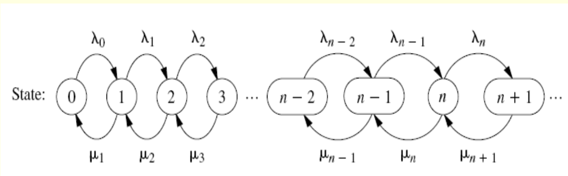
La probabilité qu'il soit inoccupé passe de $p_0=(1-\rho)=0.25$ à $p_0'=0.4$; autrement dit il n'est plus occupé que 36 minutes par heure au lieu de 45 minutes.

En résolvant: $$\frac{\lambda'}{\mu} e^{-(\mu-\lambda')t} = 0.1$$

on trouve t=68 minutes

22

Généralisation (1):



$$\begin{cases} \dfrac{dp_n}{dt} = \lambda_{n-1}\, p_{n-1} - (\lambda_n + \mu_n)\, p_n + \mu_{n+1}\, p_{n+1} \\ \dfrac{dp_0}{dt} = -\lambda_0\, p_0 + \mu_1\, p_1 \end{cases}$$

23

Généralisation (2):

State:

0:	P_1	$= \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$		
1:	P_2	$= \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 + \frac{1}{\mu_2}(\mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0)$	$= \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1$	$= \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0$
2:	P_3	$= \frac{\lambda_2}{\mu_3} P_2 + \frac{1}{\mu_3}(\mu_2 P_2 - \lambda_1 P_1)$	$= \frac{\lambda_2}{\mu_3} P_2$	$= \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} P_0$
⋮	⋮			
$n-1$:	P_n	$= \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1} + \frac{1}{\mu_n}(\mu_{n-1} P_{n-1} - \lambda_{n-2} P_{n-2})$	$= \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1}$	$= \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \cdots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \cdots \mu_1} P_0$
n:	P_{n+1}	$= \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} P_n + \frac{1}{\mu_{n+1}}(\mu_n P_n - \lambda_{n-1} P_{n-1})$	$= \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} P_n$	$= \frac{\lambda_n \lambda_{n-1} \cdots \lambda_0}{\mu_{n+1} \mu_n \cdots \mu_1} P_0$
⋮	⋮			

24

Généralisation (3):

$$C_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1}, \qquad \text{for } n = 1, 2, \ldots,$$

$$P_n = C_n P_0, \qquad \text{for } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n\right)^{-1}.$$

25

Généralisation (4):

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n, \qquad L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s)P_n.$$

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}}, \qquad W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}},$$

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n.$$

26

M/M/S

Une file d'attente M/M/S est formée de S serveurs identiques et indépendants, partageant les mêmes places d'attente. De plus

1. les arrivées définissent un processus de Poisson de taux λ;
2. les durées des services indépendants et identiquement distribués selon une loi exponentielle de paramètre μ.

Dans un tel modèle, il n'y a aucune attente tant que le nombre de clients présents ne dépasse pas le nombre S de serveurs.

27

M/M/S

L'évolution du nombre de clients dans une file M/M/S est un processus de naissance et de mort où

1. le taux d'arrivée (de naissance) est constant et égal à

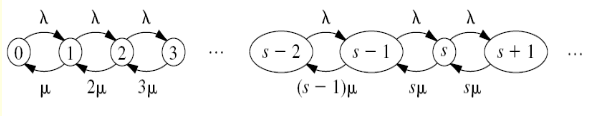
$$\lambda_n = \lambda, \quad \text{for } n = 0, 1, 2, \ldots$$

2. le taux de service (de mort) varie en fonction du nombre de clients présents

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & \text{for } n = 1, 2, \ldots, s \\ s\mu, & \text{for } n = s, s+1, \ldots \end{cases}$$

28

M/M/S



Tout comme la file M/M/1, une file M/M/m est stable si et seulement si l'intensité du trafic y est plus petite que 1 :

$$\rho = \lambda/(s\mu) < 1$$

M/M/S

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 & \text{if } 0 \le n \le s \\ \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{s!\, s^{n-s}} P_0 & \text{if } n \ge s. \end{cases}$$

$$P_0 = 1 \Big/ \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \frac{1}{1 - \lambda/(s\mu)} \right]$$

$$L_q = \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2}$$

M/M/S

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda};$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu};$$

$$L = \lambda\left(W_q + \frac{1}{\mu}\right) = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

Distributions du temps de séjour et d'attente

$$P\{\mathcal{W} > t\} = e^{-\mu t}\left[1 + \frac{P_0(\lambda/\mu)^s}{s!(1-\rho)}\left(\frac{1 - e^{-\mu t(s-1-\lambda/\mu)}}{s - 1 - \lambda/\mu}\right)\right]$$

$$P\{\mathcal{W}_q > t\} = (1 - P\{\mathcal{W}_q = 0\})e^{-s\mu(1-\rho)t}$$

$$P\{\mathcal{W}_q = 0\} = \sum_{n=0}^{s-1} P_n$$

Exemple: Attente chez un médecin

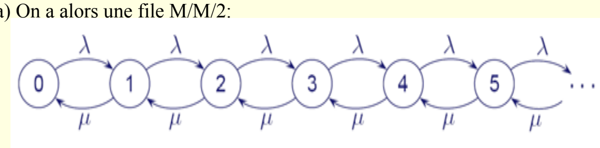
Le médecin s'adjoint une jeune confrère (mais qui n'apporte pas de nouvelle clientèle); tout patient peut-être reçu indifféremment par l'un ou l'autre des médecins.

a) Pendant quelques jours, des rendez-vous étant déjà pris, l'intervalle de 20 min entre convocations est maintenu. Calculer le temps moyen d'attente et montrer que la probabilité d'une attente supérieur à 1 heure est négligeable.

b) Pour que chacun des deux médecins assure trois consultations par heure en moyenne, il faudrait convoquer les patients à des intervalles de 10 min. Quels seraient alors le temps moyen d'attente ? La probabilité pour que l'attente dépasse 1 heure?

Exemple: Attente chez un médecin

a) On a alors une file M/M/2:



$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0,\ p_2 = \frac{\lambda}{2\mu} p_1,\ p_n = \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^{n-1} p_1, n \geq 2$$

W_q s'obtient en faisant S=2 dans la formule donnant l'attente moyenne pour la file M/M/S: W_q=2.28 min. Aussi pour t=1, on a

$$P\{W_q > t\} = 0.00014$$

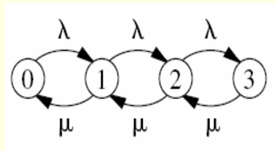
Exemple: Attente chez un médecin

b) λ''=6 arrivées par heure, p_0=1/7, *Wq*=9/28 h, soit 19,29 minutes, et la probabilité d'attendre plus d'une heure est alors:

$$P\{W_q > t\} = 0.087$$

Exemple (1):

Supposons qu'on a λ=1/20 et μ=1/12.On admet que la file est Limitée à trois éléments.



$$\begin{cases} \dfrac{dp_0}{dt} = -\lambda\ p_0 + \mu\ p_1 \\ \dfrac{dp_1}{dt} = \lambda\ p_0 - (\lambda + \mu)\ p_1 + \mu\ p_2 \\ \dfrac{dp_2}{dt} = \lambda\ p_1 - (\lambda + \mu)\ p_2 + \mu\ p_3 \\ \dfrac{dp_3}{dt} = \lambda\ p_2 - \mu\ p_3 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Exemple (2):

La longeur moyenne de la file:

$$L = \overline{X} = \sum_{n=0}^{+\infty} n\, p_n = p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 0.904$$

Le temps moyen d'attente:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{p_2 + 2p_3}{\lambda} = 7\,\text{min}\,20\,\text{sec}$$

Quelle est la probabilité que le système est saturé?

Quel est le vrai flux des arrivées?

37

M/M/1/K

$$C_n = \begin{cases} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n = \rho^n & \text{for } n = 0, 1, 2, \ldots, K \\ 0 & \text{for } n > K. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{K} (\lambda/\mu)^n} \\ &= 1 \Big/ \left[\frac{1 - (\lambda/\mu)^{K+1}}{1 - \lambda/\mu}\right] \\ &= \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}, \end{aligned}$$

38

M/M/1/K

$$L = \sum_{n=0}^{K} nP_n = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}.$$

$$L_q = L - (1 - P_0).$$

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}}, \qquad W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}},$$

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n = \sum_{n=0}^{K-1} \lambda P_n = \lambda(1 - P_K).$$

39

Analyse des données

Un premier travail de l'analyste sera de définir les périodes pendant lesquelles le phénomène peut être considéré comme stationnaire (exemple: pour un médecin dans une usine durant la première demi-heure et la dernière de la journée, ainsi que l'heure du repas, l'affluence au cabinet est très fluctuante et faible; au contraire durant les autres périodes de la journée, le phénomène stationnaire est établi et l'on peut songer à examiner les entrées et services du point de vue statistique).

1. Études des arrivées
2. Études des services

40

Études des arrivées

Pendant 100 intervalles de 5 minutes, successifs ou non, mais tous situés dans la période de stationnarité, le nombre de clients arrivant durant chaque intervalle de 5 minutes a été compté:

Nombre d'ouvrier	f_n
0	29
1	34
2	24
3	9
4	3
5	1
6	0
	100

La moyenne de cette loi de distribution est: $\sum_{0}^{6} n.\frac{f_n}{100} = 1.26$

L'emploi d'un test statistique (exemple: le test χ^2 de Pearson) va permettre de vérifier si la loi observée se rapproche d'une loi théorique classique, en l'espère celle de poisson ($\lambda t = 1.26$):

$q_0=0.28$, $q_1=0.36$, $q_2=0.23$,

$q_3=0.09$, $q_4=0.03$, $q_{>5}=0.01$

Le taux des arrivées est 1.26/5=0.25 arrivée par min.

Études des services

Durée des services	Nombre de services observés
<1 min	23
de 1 à 2 min	20
de 2 à 3 min	14
de 3 à 4 min	12
de 4 à 5 min	9
de 5 à 6 min	5
de 6 à 7 min	4
de 7 à 8 min	5
de 8 à 9 min	3
de 9 à 10 min	2
de 10 à 11 min	2
de 11 à 12 min	1
> 12 min	0

À cent reprises, consécutives ou non, mais prises dans la période stationnaire, on relève la durée du service, c'est-à-dire le temps passé par un client au guichet. La moyenne est 3.27 min. Le nombre de clients servis par minute est donc 1/3.27=0.3. On fait alors l'hypothèse que la loi des services est une loi exponentielle.

Un test de χ^2 (à 6 degrés de liberté) décide d'admettre qu'il y a bien une loi exponentielle de taux $\mu=0.3$

Premier calcul

Les formules données précédemment pour une station unique permettent de calculer:

• Le nombre moyen de clients dans le système $L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 5$

• Le temps moyen d'attente dans la file: $W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = 16{,}66 \text{ min}$

On se rend compte que le temps perdu par les ouvriers est considérable

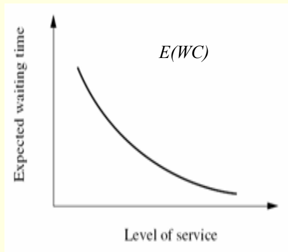
0.25 x *8* x *60* x *16.66min = 33h 20 min*

Pourtant, le médecin n'est occupé que

0.25 x *8* x *60* x *3.27min = 6h 30 min*

Optimisation du nombre de médecin

La solution consiste à embaucher 1, 2, … autres médecins en vue de diminuer le temps perdu par les ouvriers.



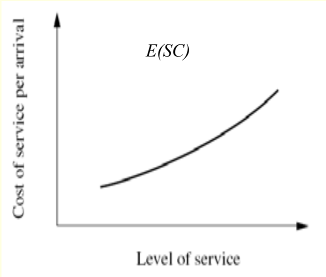
$$W_q = \frac{p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{\mu . s . s! \left(1 - \frac{\lambda}{s\mu}\right)^2}$$

On peut calculer

1. s=1, W_q=16.66 min
2. s=2, W_q=0.7 min
3. s=3, W_q=0.09 min

Optimisation du nombre de médecin

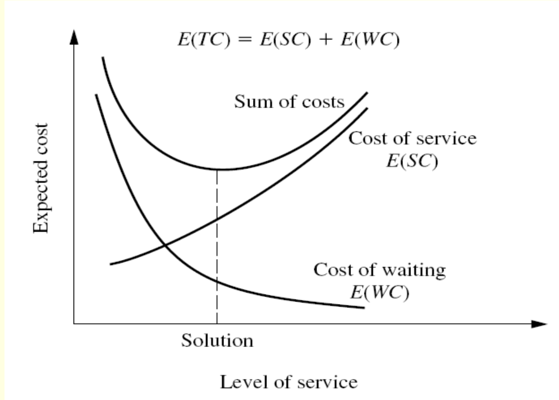
Si on désigne, de plus, par Δ le taux moyen d'inactivité des stations.



On peut calculer

1. s=1, $\Delta = p_0 = 0.167$
2. s=2, $\Delta = 2p_0 + p_1 = 1.167$
3. s=3, $\Delta = 3p_0 + 2p_1 + p_2 = 2.167$

Solution optimale



Solution optimale

Supposons que le coût de l'inactivité des médecins représente le salaire et les charges correspondant à la durée de cette inactivité: 12 dinars de l'heure, et que le temps perdu en attente par les ouvriers peut être évalué à 50 dinars de l'heure, compte tenu de la perte à la production, on obtient les coûts totaux suivants:

1. pour s=1, *E(TC)=E(WC)+E(SC)*
   = *0.25* x *8* x *60* x *16.66* x *0.833*+ *8* x *60* x *0.167* x *0.2*
   = *1682.7* dinars
2. pour s=2, *E(TC)*= *0.25* x *8* x *60* x *0.7* x *0.833*+ *8* x *60* x *1.167* x *0.2*
   = ***182.03*** dinars
3. pour s=3, *E(TC)*= *0.25* x *8* x *60* x *0.09* x *0.833*+ *8* x *60* x *2.167* x *0.2*
   = *217.03* dinars

Exercice I

Un atelier compte 5 machines, chacune ayant un taux de panne poissonnien égal à $\lambda=1/3$ par heure. On a un mécanicien pour réparer les machines et trois ouvrier les utilisant. Le taux de service est de $\mu=1/2$; autrement dit, il faut deux heures en moyenne au mécanicien pour réparer une machine. Le salaire, charges comprises, d'un mécanicien est de 30 dinars de l'heure. Lorsqu'un ouvrier est immobilisé la perte (salaire+charges+perte de production) est estimée à 50 dinars par heure. Ne vaudrait-il pas mieux augmenter le nombre de mécaniciens?

Solution

$E(TC)=E(WC)+E(SC)$

$= (3p_5+2p_4+1p_3) \text{ x } 8 \text{ x } 50 + (3p_0+2p_1+1p_2) \text{ x } 8 \text{ x } 30$

1. pour s=1, p_1=270/5711, p_2=720/5711, p_3=1440/5711, p_4=1920/5711, p_5=1280/5711 et $E(TC)=638.7$ dinars
2. pour s=2, p_1=81/1391, p_2=270/1391, p_3=360/1391, p_4=360/1391, p_5=240/1391 et $E(TC)=385.1$ dinars
3. pour s=3, $E(TC)= 447.67$ dinars

En conclusion, la meilleure solution est d'engager deux mécaniciens.

Aussi, on pourrait penser à faire varier le nombre d'ouvrier et/ou machines

Exercice II

Le service informatique de l'école s'est penché sur le problème des moyens d'impression mis à disposition des étudiants dans les salles en accès libre. Il a finalement réduit les choix possibles à l'alternative :

1) installer une seule imprimante rapide ;

2) installer trois imprimantes partageant la même queue d'impression mais trois fois plus lentes que le modèle rapide.

En tant qu'utilisateur, quel équipement vous semble le plus intéressant ? Argumenter votre réponse.

Solution

Une manière simple de comparer les deux propositions consiste à modéliser la première installation par une file M/M/1 et la seconde par une file M/M/3 et à comparer leurs performances pour une même intensité du trafic ρ.

Si μ_1 désigne le taux de service de l'imprimante rapide, celui des trois imprimantes lentes est $\mu_2 = \mu_1/3$ et pour un taux d'arrivée λ les deux systèmes ont le même taux d'occupation

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu_1} = \frac{\lambda}{3\mu_2}$$

Solution

Pour la mesure de performance, le plus équitable est de retenir le temps moyen de réponse W.

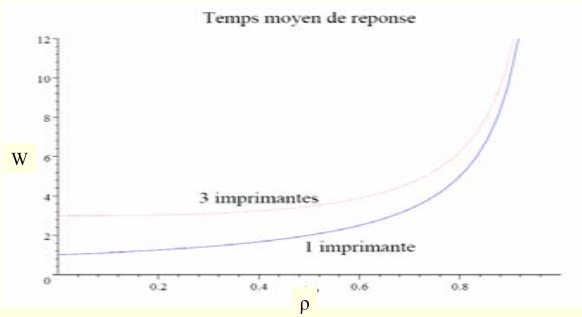
Pour le modèle M/M/1, on a: $W_1 = \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$

et pour le modèle M/M/3, on a: $W_2 = \frac{1}{\mu_2}\left(1 + p_0 \frac{(3\rho)^3}{3\times 3!(1-\rho)^2}\right)$

avec $p_0 = \left(\frac{(3\rho)^3}{3!(1-\rho)} + 1 + 3\rho + \frac{(3\rho)^2}{2!}\right)^{-1}$

Solution

La comparaison des deux modèles est donnée ci-dessous et montre une supériorité de l'équipement formé d'une seule imprimante rapide.



Question de calcul

http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/education/09/english/index.html