Université de Tunis
Institut Supérieur de Gestion
Département EMQ
2007/2008

Recherche Opérationnelle *Série 1*

Exercice 1 :

On considère un problème d'analyse de décision avec les payoffs (en milliers de dollars) donnés dans la table suivante :

	State of Nature	
Alternative	s_1	s_2
A_1	80	25
A_2	30	50
A_3	60	40
Prior probability	0.4	0.6

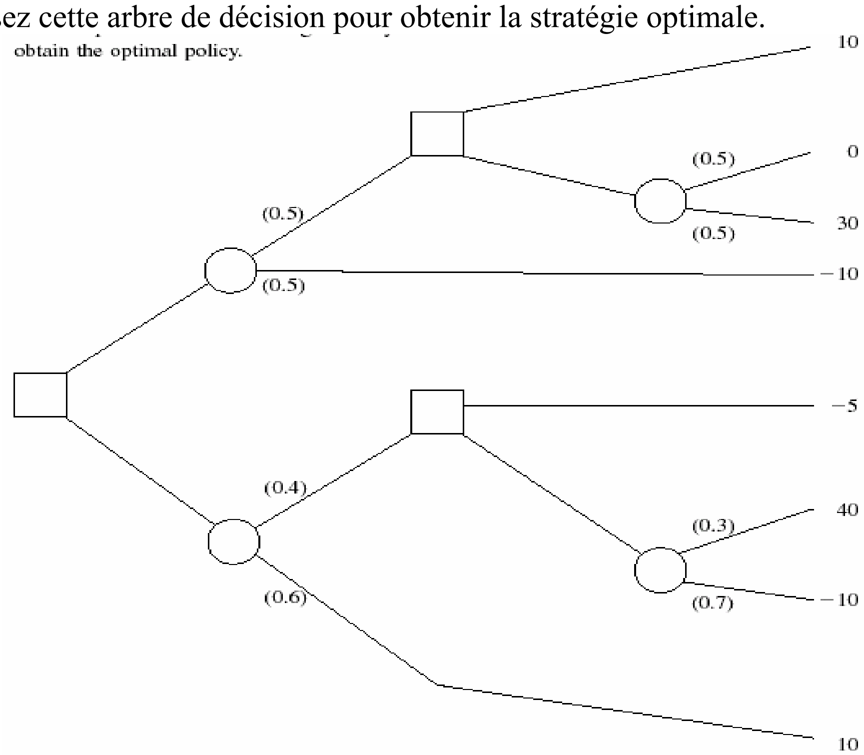
Quelle alternative doit être choisi :

a) D'après le critère du payoff maximum
b) D'après le critère de la probabilité maximale
c) D'après la règle de décision de Bayes

Tracez le graphique de l'analyse de sensibilité et déterminez les points de croisements.

Exercice 2 :

Soit l'arbre de décision suivante, les probabilités résultantes des évènements aléatoires sont données entre les parenthèses et les payoffs sont données à la fin de chaque trajectoire (à droite). Analysez cette arbre de décision pour obtenir la stratégie optimale.



Exercice 3 :

le département de sport de Leland university cherche a savoir si il doit mener une compagne l'année prochaine pour collecter des fonds nécessaire pour la construction d'un terrain de football. L'élaboration de cette compagne dépend fortement du succès de l'équipe de foot ou de son échec, dans le passé l'équipe de foot à fait une saison réussi à 60% des fois, si la saison réussi (W) plusieurs personnes vont contribuer dans cette compagne et les fonds vont même atteindre 3 million de dollar. Si l'équipe fait une mauvaise saison suite à plusieurs échecs (L) alors très peu de personnes vont contribuer à la compagne et cette dernière va perdre 2 millions de dollars. S'il n'y a pas de compagne alors il n'y aura pas de charge a supporter. Le 1^{er} septembre juste avant que la saison de foot commence, le département de sport a besoin de prendre une décision pour voir si il doit mener cette compagne ou non.

a) selon la règle de décision de Bayes est ce que le département doit mener cette compagne ?
b) Définir l'EVPI et déterminer sa valeur
c) Un entraîneur bien connu William Walsh, a offert ses services pour évaluer le niveau de l'équipe et voir si elle va réussir sa saison pour 100,000$.William va donner ses prévisions le 1^{er} septembre pour se prononcer sur la nature de la saison que l'équipe fera (W ou L). dans des situations similaires dans le passé quand cette analyste a évalué des équipes ayant réussi leur saison a plus que 50% de fois, ses prévisions étaient juste a 75% des fois, en considérant que cette équipe a une tradition de faire souvent des bonne saison, si William prévoit une saison réussi, quelle est la probabilité postérieure pour que l'équipe actuelle fera une bonne saison (réussi) ? quel est la probabilité postérieure pour que l'équipe actuelle fera une mauvaise saison (échec) ?
Si William prévoit une mauvaise saison quelle est la probabilité postérieure d'avoir une bonne saison ? Tracer le diagramme associé à l'arbre des probabilités postérieures.
d) Tracez l'arbre de décision pour ce problème et déterminez la stratégie optimale.

Exercice 4 :

Une personne qui vit dans une région où il y a des fortes possibilités d'avoir des tremblements de terre, cette personne peut se couvrir contre cette catastrophe naturelle en achetant une assurance avec le coût annuel de 180 $. La probabilité d'avoir un tremblement de terre détruisant sa maison durant une année est de 0,001. si ceci se réalise, il estime que le coût des dommages (totalement couvert par par l'assurance contre les tremblement) sera de 160$. Son actif total (incluant la maison) s'estime à 250$.

a) Tracez la table du payoff
b) En appliquant la règle de décision de Bayes, quel est l'alternative qui maximise son actif espéré après un an.
c) On construit maintenant la fonction d'utilité qui permet de mesurer la valeur de l'actif total x dollars de cet personne ($x \geq 0$). La fonction d'utilité est $U(x) = \sqrt{x}$
Comparez l'utilité de réduire son actif total l'année prochaine par le prix de l'assurance contre les tremblements de terre avec l'utilité espéré de ne pas faire cette assurance. Est ce que cette personne doit faire cette assurance

Exercice 5 :

On considère le problème de recherche du plus court chemin dans le graphe suivant:

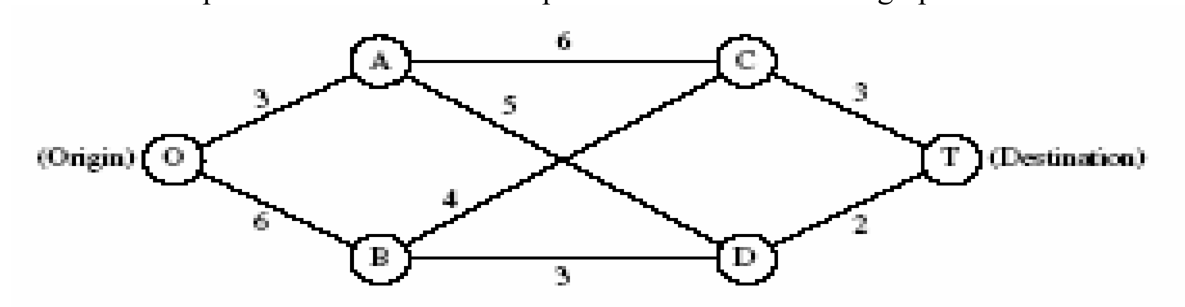


Figure2 : les nombres au dessus des arcs représentent les distances entre les villes (nœuds)

Formulez ce problème comme étant un programme linéaire en nombre entiers, et trouver la solution optimale.

Exercice 6 :

Une centrale de rapide poste doit distribuer des colis aux 9 agences de son district. La centrale dispose de trois chauffeurs pour la livraison en camions.
Chaque jour, les trois chauffeurs arriveront dans moins d'une heure pour livrer les 9 colis à leurs destinations correspondantes.
Les itinéraires des trois chauffeurs figurent dans le tableau suivant :

	Attractive Possible Route									
Delivery Location	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
A	1				1				1	
B		2		1		2			2	2
C			3	3			3		3	
D	2					1		1		
E			2	2		3				
F		1			2					
G	3						1	2		3
H			1		3					1
I		3		4			2			
Time (in hours)	6	4	7	5	4	6	5	3	7	6

Les nombres dans les colonnes indiquent l'ordre des livraisons avec le temps évalué exigé pour traverser la route.
On veut réduire au minimum le temps total en incluant chaque emplacement de livraison sur son chemin exact.

1) formuler le modèle BIP.
2) Utiliser l'ordinateur pour résoudre ce problème.

Exercice 7 :

On considère le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 20x_1 + 30x_2 + 25x_3 \\ \text{S.c} & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq b_1 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq b_2 \\ & x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq b_3 \\ & x_j \geq 0 \text{ pour } j = 1,2,3 \end{array}$$

où b_1, b_2 et b_3 sont des variables aléatoires

On suppose que la distribution de probabilité de chacune de ces variables aléatoires peut prendre n'importe laquelle de ces trois valeurs possibles. Ces valeurs sont

$(29,30,31)$ pour b_1

$(48,50,52)$ pour b_2

$(57,60,63)$ pour b_3

dans chaque cas, la probabilité de la valeur du milieu est de ½ alors que la probabilité des deux autres valeurs est de ¼, les variables aléatoires sont statistiquement indépendant.

Reformulez ce problème sous forme d'un problème de programmation linéaire ordinaire et équivalent en utilisant

a) l'approche Fat Solution
b) l'approche des scénarios
c) L'approche avec seuils de probabilité sur les contraintes ($\alpha = 0.75$).

Exercice 8 :

Soit N un entier positif, montrer que la distribution de probabilité suivante :

$$P(X = k) = \begin{cases} \dfrac{2k}{N(N+1)} & \text{si } k = 1, 2, \ldots N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

définit bien une loi de probabilité et calculer E(X). On rappelle que :

$$\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Exercice 9 :

Etant donné trois évènements A, B et C, montrer que

$P((A,B) \mid C) = P(A \mid C) * P(B \mid (A,C))$.

Exercice 10 :

Pour l'étude de la clientèle d'un supermarché, on définit les variables aléatoires :

- X : prenant la valeur 1 si le client est de sexe masculin et 0 sinon.
- Y : prenant la valeur 1 si le client paie les achats en espèce et 0 sinon

Le couple aléatoire (X, Y) est défini par la loi de probabilité conjointe suivante :

$$P_{xy} = \begin{cases} c\,2^{y-x} & \text{si } x = 0;1 \text{ et } y = 0;1. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1- Déterminer la valeur de la constante c.
2- Déterminer les lois de probabilité marginales de X et Y.
3- Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier votre réponse.
4- Déterminer les lois de probabilité conditionnelles de X /Y et de Y / X.

Exercice 11 :

On jette deux dés simultanément, on considère les variables aléatoires suivantes :

X : Somme des deux dés.

Y : |Différence des deux dés|.

1- Déterminer l'espace des états possibles de X et Y, puis la distribution jointe du couple (X, Y).

2- Calculer les probabilités suivantes :

$P(Y=3)$, $P(X=9)$, $P(X=6, Y \leq 4)$, $P(X=6 \mid Y=2)$.

Exercice 12 :

Soient les deux matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.9 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

1- Calculer $A*B$ puis $B*A$.

2- Déterminer A^2 puis B^2.

3- Soit un vecteur v tel que $v=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.7 & 0.1 \end{pmatrix}$

Déterminer $v*A$ et $v*B$.