Université de Tunis
Institut supérieur de Gestion
Année universitaire 2007-2008
Département EMQ
3 IAG

Recherche Opérationnelle *Série 2*

Exercice 1 :

Deux compagnies se partagent le marché pour un produit donné. La compagnie A détient pour le moment 80% du marché, tandis que la compagnie B n'en détient que 20%.

1- En désignant par X_n la répartition du marché entre les deux compagnies après n mois, écrire la loi de probabilité de X_0 : la répartition initiale du marché.

2- Une étude de marché effectuée par la compagnie A, a établie que d'un mois à l'autre, le mouvement des clients se fait avec les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P(X_{n+1} = A \mid X_n = A) = p_{AA} = 0.7, \quad P(X_{n+1} = A \mid X_n = B) = p_{BA} = 0.6$$

$$P(X_{n+1} = B \mid X_n = A) = p_{AB} = 0.3, \quad P(X_{n+1} = A \mid X_n = B) = p_{BB} = 0.4$$

En supposant que ces probabilités sont homogènes, càd :

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i) = p_{ij} \ , \forall\, n \geq 0$$

a- Ecrire la matrice P des probabilités conditionnelles.

b- En déduire que les probabilités croisées du couple $(X_0 \ , X_1)$.

c- Trouver de deux manières différentes, la loi de X_1.

Exercice 2:

Soit (X_n) une chaîne de Markov, montrer que :

$$P(X_0 = i_0 / X_1 = i_1, ..., X_n = i_n) = P(X_0 = i_0 / X_1 = i_1).$$

Exercice 3 :

Dans un jeu au hasard, un joueur dispose au départ d'une somme de 2 dinars. Il mise un dinar au début de chaque étape et il a une probabilité p=0.4 de gagner.

Ce joueur décide d'arrêter de jouer dans le cas où il sera ruiné ou dans le cas où sa fortune X_n après n étapes sera T=4 dinars.

1) Montrer que la suite X_n est une chaîne de Markov.
2) Ecrire X_{n+1} en fonction de X_n.
3) Etablir la matrice de transition à une étape P et tracer son graphe.
4) Calculer la probabilité que la fortune du joueur soit de 2 dinars après deux étapes.

Exercice 4 :

Soit $\{X_n , n \geq 0\}$ une chaîne de Markov dont l'espace des états I est l'ensemble des nombres entiers non négatifs $N = \{0,1, 2\}$ et telle que :

$$\sum_{j \in I} j\, p_{ij} = Ai + B, \quad i \in I$$

où A et B sont deux constantes.

1) Montrer que $E(X_{n+1}) = A\,E(X_n) + B$.
2) Soit la matrice de transition suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$$

a) Déterminer la valeur de A et B.
b) Déterminer la valeur de x et y.

Exercice 5 :

Soit un récipient contenant N boules noires et R boules rouges, On enlève les boules une par une sans les remettre dans le récipient après avoir observé leur couleur.
On dira que le système est dans l'état i après n prélèvements s'il reste exactement i boules noires dans le récipient.
On écrit $X_n = i$, où $\{X_n, n \geq 0\}$ est un processus stochastique représentant le nombre de boules noires restant dans le récipient après chaque prélèvement.
Montrer que ce processus décrit une chaîne de Markov non homogène.