Université de Tunis
Institut Supérieur de Gestion
Département EMQ
2007/2008

Recherche opérationnelle ***série 3***

Exercice 1 :

On suppose que la probabilité de pleuvoir demain est de 0.5 s'il pleut aujourd'hui et la probabilité qu'il ferait beau demain est de 0.9 s'il fait beau aujourd'hui. On suppose que ces probabilités ne changent pas si l'information météorologique est justifié par rapport au temps fut hier .

a) Modéliser ce processus à l'aide d'une chaîne de markov.
b) Donner l'ensemble des états de la chaîne et sa matrice de transition.
c) En utilisant l'équation de Chapman- Kolmogorov, trouver la matrice $P^{(n)}$ pour n=2, 5, 10, 20
d) La probabilité de pleuvoir aujourd'hui est de 0.5, utiliser (c) pour déterminer la probabilité de pleuvoir dans n jours à partir d'aujourd'hui, n=2,5,10,20.
e) Déterminer la probabilité stationnaire. Montrer que cette probabilité est limite de la matrice après n transitions quand n tend vers l'infini.

Exercice 2 :

Une particule se déplace en un cercle et touche les points marqués 0,1,2,3,4 .
La particule part du point (0) :

- Chaque passage -dans le sens des aiguilles d'une montre- d'un point à un autre suivant est effectué avec une probabilité 0,5 (0 après 4, etc..).
- Chaque passage -dans le sens inverse des aiguilles d'une montre- d'un point à un autre suivant est effectué avec une probabilité aussi 0,5.

Soit $\boldsymbol{X_n}$ $\boldsymbol{n \geq 0}$ une chaîne de Markov tel qu'il indique :La localisation de la particule dans le cercle après n étapes.

a) Construire la matrice de transition de cette chaîne de markov.
b) Déterminer la matrice de transition $\boldsymbol{P^{(n)}}$ pour n=5, 10, 20, 40, 80.
c) Déterminer les probabilités stationnaires , monter que ces probabilités stationnaires sont limites de la matrice de transition après (n) étapes lorsque n est très grand..

Exercice 3 :

On considère la chaîne de Markov ayant la matrice de transition suivante :

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \text{State} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

a) Tracer le graphe et Classifier les états de la chaîne de Markov .
b) Déterminer la période de chaque états .

Exercice 4:

On considère l'inventaire suivant pour une certaine production.
Si la demande durant une période excède le nombre d'articles existant en réserve dans ce cas , le client demandeur doit attendre le ravitaillement en ce produit..
Soit Z_n $n \geq 0$: la somme des articles existants dans le dépôt moins le nombre d'unités en attente avant de passer la commande à la fin de la période n avec $(Z_0 = 0)$.
Si $Z_n > 0$ il n'y a pas d'attente.
Si $Z_n < 0$ alors $-Z_n$ représente le nombre d'unité en attente et pas d'unité au dépôt .
A la fin de la période n, si $Z_n < 1$ une commande est placée pour 2m unités avec $m \in N$ tq $Z_n + 2m \geq 1$, les commandes sont reçues immédiatement.
Soit D_1 , D_2 , D_3 , ……. la demande du produit pendant la période 1, 2 …. (respectivement). On suppose que D_n soit i.i.d et prennent les valeurs 0,1,2,3,4, chacune avec une probabilité 1/5.
Soit X_n $n \geq 0$ la somme des articles en réserve après avoir reçue le ravitaillement à la fin de la période n avec $(X_0 = 2)$ alors

$$X_n = \begin{cases} X_{n-1} - D_n + 2m & \text{if } X_{n-1} - D_n < 1 \\ X_{n-1} - D_n & \text{if } X_{n-1} - D_n \geq 1 \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

Quand X_n $n \geq 0$ est une chaîne de Markov admettant uniquement deux états :
1 et 2 car le seul moment qu'une commande soit faite est lorsque $Z_n = 0$,-1,-2 ou -3. Dans ces cas là et respectivement 2, 2, 4 et 4 unités sont commandées et donc respectivement on a $X_n = 2, 1, 2, 1.$

a) Construire la matrice de transition .
b) Déterminer les probabilités stationnaires.

<u>Exercice 5:</u>

Un ordinateur est inspecté à la fin de chaque heure pour voir s'il fonctionne ou il est bloqué.
Si l'ordinateur fonctionne, il fonctionnera à 90% des cas l'heure suivante. Si l'ordinateur est bloqué , il doit être réparé en plus qu'une heure , et donc mis à part le temps qu'il est resté bloqué la probabilité qu'il restera bloqué l'heure suivante est de 0,35.

a) Montrer que ce processus est une Chaîne de Markov et déterminer sa matrice de transition après une étape.
b) Trouver le temps moyen du premier passage de l'état i à l'état j pour tout i et j .

<u>Exercice 6 :</u>

Dans une usine une machine se détériore rapidement du point de vue qualité et rendement après un usage fréquent. Cette machine passe à l'inspection à la fin de chaque jour. Immédiatement après l'inspection les états de la machine sont notés dans le tableau suivant :

état	**condition**
0	Bon état comme neuve
1	Opérable – détérioration minimale
2	Opérable – détérioration majeure
3	En panne et remplacement par une nouvelle machine.

Le processus peut être modéliser comme étant une chaîne de Markov avec une matrice de transition suivante :

Etat	0	1	2	3
0	0	7/8	1/16	1/16
1	0	3/4	1/8	1/8
2	0	0	1/2	1/2
3	1	0	0	0

a) Trouver les probabilités stationnaires.

b) Si les coûts de chaque états sont respectivement 0, 1000$, 3000$ et 6000$ calculer le coût moyen à long terme par jour.
c) Trouver le temps moyen de récurrence de l'état 0 (càd le temps moyen que la machine put être utilisée avant d'être remplacée).

Exercice 7 :

Une usine de cassette vidéo est confiante de la qualité des enregistrements qu'elle présente. Elle offre des garanties de remplacement complet pour les enregistrements qui se détériore au bout de 2 ans. Suite à des statistiques , la société à remarquer que 1% de ces enregistrements se détériorent dés la première année. Par contre 5% de ces enregistrements restent en bon état la première année et se détériorent pendant la deuxième année. Les enregistrements déjà remplacer ne sont plus sous garantie.

a) Formuler l'évolution des états de l'enregistrement comme une chaîne de Markov dont les états inclus deux états absorbants qui entraîne le besoin d'avoir la garantie ou bien l'enregistrement survie à la période de la garantie.
b) Donner la matrice de transition.
c) Trouver la probabilité pour laquelle la société devra acquitter la garantie.